11 класс

Второй день

11.6. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

11.7. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

11.8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

11.9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$

11.10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x + \frac{1}{yz}, y + \frac{1}{zx}, z + \frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

XLVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

11.7. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

11.8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

11.9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$

11.10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x + \frac{1}{yz}, y + \frac{1}{zx}, z + \frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.